РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

Р.В.ГУСЕЙНОВ, Р.А.АМАНОВ
Бакинский Государственный Университет
amanov@rambler.ru

В работе для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка недивергентной структуры рассматривается задача Дирихле. Доказывается критерий типа Винера регулярности граничной точки относительно указанной задачи.

Пусть $E_n - n$ - мерное Евклидово пространство точек $x = (x_1,...x_n)$, $n \geq 3$, D - ограниченная область в E_n с границей ∂D, $0 \in \partial D$. Рассмотрим в D задачу Дирихле

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\partial D} = 0 \tag{2}$$

в предположении, что $\|a_{ij}(x)\|$ - действительная симметрическая матрица с измеримыми в D элементами, причём для почти всех $x \in D$ и любого $\zeta \in E_n$ выполнено условие

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \zeta_i^2 \leq \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \zeta_i \zeta_k \leq \mu^{-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \zeta_i^2, \tag{3}$$

здесь $\mu \in (0,1]$ - константа, $\lambda_i(x) = \left[\omega_i^{-1}(\rho(x))/\rho(x)\right]^2$, $\rho(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\omega_i(|x_i|)\}$, при этом $\omega_i(t)$ - строго монотонно возрастающие функции для $t \in (0,d]$, $d = diamD$, $\omega_i^{-1}(t)$ - функции, обратные к $\omega_i(t)$, и, кроме того, для $i = 1,...,n$ и достаточно малых t

$$C_1 \omega_i(t) \leq \omega_i(2t) \leq C_2 \omega_i(t), \tag{4}$$

где $\omega_i(0) = 0$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ - некоторые константы.

Целью настоящей статьи является изучение вопроса регулярности граничных точек относительно задачи Дирихле (1), (2). Найдено достаточное условие регулярности граничных точек типа критерия Винера для уравнения Лапласа. В терминах расходимости ряда из анизотропных емкостей, для уравнения (1) доказывается аналог критерия Е.М.Ландиса [1], полученного в терминах, так называемых, «S - емкостей».

Доказательству критерия Винера для эллиптических уравнений посвящены работы Е.М.Ландиса [1], В.Г.Мазьи [2], Н.В.Крылова [3], А.А.Новрузова [4,5], Р.В.Гусейнова [6,7], Ю.А.Алхутова, И.Т.Мамедова [8]. В случае невырождающихся уравнений аналогичный результат доказан в [9]. Отметим, что некоторые частные результаты по неравномерно вырождающимся уравнениям ранее были получены в работах [10, 11, 12].

Обозначим через $E_R^{x_0}(k)=\left\{x\in E_n : \left|x_i-x_i^0\right|<k\omega_i^{-1}(R)\right\}$, $i=1,...,n$, $k>0$, $R>0$, $E_R^0(1,9)=E_R^0(9)\setminus E_R^0(1)$. Введем вспомогательную функцию

$$G_R^{(S)}(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(x_i-y_i)R}{\omega_i^{-1}(R)}\right)^2\right]^{-S/2}, \tag{5}$$

где S - положительное число.

Определение 1. Функцию $u(x)$, являющуюся решением неравенства $Lu\le 0$, будем называть L - суперэллиптической. Функцию $u(x)$ назовем L - субэллиптической, если $-u(x)$ L - суперэллиптична.

Определение 2. Пусть H – Борелевское множество в $E_R^0(1,9)$. Назовем меру ν на H, (S,R) - допустимой, если

$$\int_H G_R^{(S)}(x,y)d\nu(y)\le 1 \text{ при } x\notin H.$$

Число $cap_R^S H=\sup\nu(H)$, где точная верхняя грань берется по всем допустимым мерам, называется (S,R) - ёмкостью множества H.

Лемма 1 (Возрастание положительных решений). Пусть в слое $E_R^0(1,9)$ расположена область D, имеющая предельные точки на $\partial E_R^0(1,9)$. Пусть, далее в D определена L - субэллиптическая положительная функция $u(x)$, непрерывная в $\overline{D}$, обращающаяся в нуль на той части ∂D, которая лежит строго внутри $E_R^0(1,9)$. Тогда существует константа $S=S_0(C_1,C_2,n,\mu)$, такая, что для $S>S_0$ справедлива оценка

$$\sup_D u(x)\ge\left(1+\eta_0 R^{-S} cap_R^{(S)}(H_k)\right)\sup u(x),\ x\in D\cap E_R^0, \tag{6}$$

где $\eta_0=\eta_0(C_1,C_2,n,\mu,s)$, $H_R=E_R^0\left(4\frac{3}{4},5\frac{1}{4}\right)\setminus D$, $cap_R^{(S)}(H_R)$ - емкость множества H_R в смысле определения 2.

Доказательство. Сделаем замену переменных $x\to y$ вида $x_i=\left(\omega_i^{-1}(R)/R\right)y_i$; $i=1,...,n$. Тогда слой $E_R^0(1,9)$ будет отображен в $\Pi=\left\{y\in E_n : 1\le\left|y_i\right|\le 9\right\}$, $i=1,...,n$. Уравнение (1) в новых координатах будем записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{R^2 a_{ij}\left(\omega^{-1}(R)y\right)}{\omega_i^{-1}(R)\omega_j^{-1}(R)}\widetilde{u}_{y_iy_j}=0, \tag{7}$$

где $\omega^{-1}(R)y=\left(\omega_1^{-1}(R)y_1,\dots,\omega_n^{-1}(R)y_n\right)$, $\widetilde{u}(y)=u\left(\omega^{-1}(R)y\right)$. Уравнение (7) является равномерно эллиптическим в Π относительно функции $\widetilde{u}(y)$. На самом деле, положим

$$b_{ij}(y)=\frac{R^2 a_{ij}\left(\omega^{-1}(R)y\right)}{\omega_i^{-1}(R)\omega_j^{-1}(R)},\ \text{то}\ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y)\widetilde{u}_{y_i y_j}=0. \qquad (8)$$

Из условия (3) вытекает:

$$\mu R^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\left(\frac{\zeta_i}{\omega_i^{-1}(R)}\right)^2\le\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y)\zeta_i\zeta_j^{-}\le R^2\mu^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\left(\frac{\zeta_i}{\omega_i^{-1}(R)}\right)^2, \qquad (9)$$

где $x=\dfrac{\omega^{-1}(R)y}{R}$. Имеем для $x\in E_R^0$, $\lambda_i(x)=\left[\dfrac{\omega_i^{-1}(\rho(x))}{\rho(x)}\right]^2$,

$\rho(x)=\max\limits_{1\le i\le n}\{\omega_i(|x_i|)\}=\max\limits_{1\le i\le n}\{\omega_i(\omega_i^{-1}(R)\cdot|y_i|)\}\le C_3 R$, а также $\rho(x)\ge C_4 R$, где C_3, C_4 зависят от C_1 и C_2. Далее, в силу условия (4), $\exists C_5, C_6$, зависящие опять от C_1 и C_2, что $C_5\omega_i^{-1}(R)\le\omega_i^{-1}(\rho(x))\le C_6\omega_i^{-1}(R)$.

Для некоторых C_7, C_8 (зависящих от C_1 и C_2) учитывая указанные выше оценки для $\rho(x)$, $\omega^{-1}(\rho(x))$, имеем:

$$C_7\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^2\le\lambda_i(x)\le C_8\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^2,\ x\in E_R^0(1,9). \qquad (10)$$

В силу оценки (10) из (9) получаем:

$$\forall\zeta\in E_n,\ C_7\mu|\zeta|^2\le\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y)\zeta_i\zeta_j\le C_8\mu^{-1}|\zeta|^2. \qquad (11)$$

Итак, показано, что функция $\widetilde{u}(y)$ в Π является решением уравнения (8), коэффициенты которого удовлетворяют условию равномерной эллиптичности (11). Тогда, согласно лемме возрастания для слоев (см. [1]), будем иметь:

$$\sup_{y\in D'}\widetilde{u}(y)\ge\left(1+\eta_0 C_s(H')\right)\sup_{y\in D'\cap\{|y_i|=5,i=1,\dots,n\}}\widetilde{u}(y), \qquad (12)$$

где D' - образ множества D, H' - образ множества H при отображении $x=\dfrac{\omega^{-1}(R)y}{R}$.

Замечание 1. В работе [1] оценка (12) доказана для шарового слоя. Её доказательство дословно проходит и в случае слоя Π (можно также, применить гладкое отображение Π в шаровой слой, которое сохраняет условие равномерной эллиптичности и, далее, сослаться на упомянутый результат).

Из оценки (12) для функции $u(x)$ следует (6). На самом деле, в оценке (12) $S>S_0(C_1,C_2,n,\mu)$, $C_S(H')$ - есть S - емкость множества H': пусть ν' - допустимая мера на H' в следующем смысле

$$\int_{H'} |\overline{\omega}-\vartheta|^{-S} d\nu'(\vartheta) \le 1 \text{ при } \overline{\omega} \not\subset H. \tag{13}$$

Положим $C_S(H') = \sup \nu'(H')$, где верхняя грань берется по всем допустимым мерам ν' в H'. Сделаем обратное преобразование $y_i = \left(R / \omega_i^{-1}(R)\right) x_i$. Тогда из этого определения нетрудно видеть, что условие (13) преобразуется в условие

$$\int_H G^{(S)}(x,y) d\left(\nu'(y) \cdot R^S\right) \le 1 \quad \text{при} \quad x \notin H,$$

т.е. $C_S(H') = \dfrac{cap_R^{(S)}(H_R)}{R^S}$. Учитывая последнюю в (12), получим лемму возрастания (6).

Определение 3. Рассмотрим в D задачу Дирихле $Lu = 0$, $u|_{\partial D} = \varphi(x)$, $\varphi \in C(\partial D)$. Назовем точку $0 \in \partial D$ регулярной относительно задачи Дирихле, если при всякой $\varphi \in C(\partial D)$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \varphi(0). \tag{14}$$

Теорема 1. Пусть D - ограниченная область и точка O принадлежит границе ∂D области D. Пусть оператор L имеет вид (1) и относительно его коэффициентов выполняются условия (3), (4). Тогда для того, чтобы точка O была регулярной относительно задачи Дирихле, достаточно чтобы было

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{r}^k \nu_k = \infty, \tag{15}$$

где $\nu_k = cap_{r^{-k}}^{(S)}(H_k)$, $H_k = E_{r^{-k}}^0\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right) \setminus D$, $r = \dfrac{1}{\beta}$, $0 < \beta < 1$ таково, что $E_{\beta R}^0(9) \subset E_R^0(5)$, $R > 0$.

Доказательство. Пусть $0 < \beta_0 < 1$ таково, что $E_{\beta_0 R}^0(9) \subset E_R^0(5)$, $R > 0$. Для справедливости данного включения достаточно, чтобы $\omega_i^{-1}(\beta_0 R) \le \frac{5}{9} \omega_i^{-1}(R)$ при всех $R > 0$ и $i = 1,...,n$. Тогда из $\max\limits_{1 \le i \le n} \left\{ \dfrac{|x_i|}{\omega_i^{-1}(\beta_0 R)} \right\} \le 9$ следует $\max \left\{ \dfrac{|x_i|}{\omega_i^{-1}(R)} \right\} \le 5$, т.е. $E_{\beta,R}^0(9) \subset E_R^0(5)$. Таким образом, из принципа максимума следует, что

$$\sup_{D \cap E_R^0(5)} u(x) = \sup_{D \cap \partial E_R^0(5)} u(x),$$

откуда, в силу леммы возрастания, получаем

$$\sup_D u(x) \ge \left(1 + \eta_0 R^{-S} cap_R^{(S)}(H_R)\right) \sup_{D \cap E_R^0(5)} u(x).$$

Поэтому

$$\sup_{D} u(x) \ge \left(1+\eta_0 R^{-S} cap_R^{(S)}(H_R)\right) \sup_{D\cap E^0_{\beta_0 R}(9)} u(x).$$

Обозначим $r=\dfrac{1}{\beta_0}$ и возьмем $R=r^{-k}$. Имеем:

$$\sup_{D} u(x) \ge \left(1+\eta_0 r^{ks}\nu_k\right) \sup_{D\cap E^0_{r^{-(k+1)}}(9)} u(x).$$

Пусть даны произвольные $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$. Пусть, далее, дана произвольная подобласть D' области D с границей $\partial D'$. В области D' определена субэллиптическая функция $u(x)$, непрерывная в D' и удовлетворяющая неравенствам

$$u(x)<1,\ \ u(x)\big|_{\partial D'\cap E^0_{\varepsilon_1}(9)} \le 0.$$

Надо показать, что существует $\delta>0$, зависящее от S, ε_1 и ε_2 такое, что в точках $x\in D'\cap E^0_\delta(9)$ имеет место $u(x)<\varepsilon_2$. Обозначим через k_0 наименьшее натуральное число, для которого $r^{-k_0}<\varepsilon_1$. Пусть натуральное число $k>k_0$ таково, что существует точка $x'\in D'\cap E^0_{r^{-k}}(9)$, в которой $u(x')>\varepsilon_2$. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что число k меньше некоторой константы, зависящей от S, ε_1, ε_2. Для каждого i, $i=k_0$, $k_0+1,\dots,k$ обозначим:

$$M_i=\sup_{D'\cap E^0_{r^{-i}}(9)} u(x).$$

Рассмотрим теперь для каждого i, $i=k_0+1,\dots,k$ параллелепипеды $E^0_{r^{-k}}(9)$ и $E^0_{r^{-(i-1)}}(9)$. Рассмотрим множество точек $x\in D'\cap E^0_{r^{-(i-1)}}(9)$, в которых $u(x)>0$, и выберем связную компоненту D_i, содержащую некоторую точку из $\partial E^0_{r^{-i}}(9)$, где $u(x)$ достигает максимального значения M_i. Применяя лемму возрастания к параллелепипедам $E^0_{r^{-i}}(9)$, $E^0_{r^{-(i-1)}}(9)$ и области D_i, получим

$$M_{i-1}\ge\left(1+\eta_0 r^{is}\nu_i\right)M_i,$$

где $\nu_i=cap^{(s)}_{r^{-i}}\left(E^0_{4^{-i}}\left(4\frac{1}{4},5\frac{1}{4}\right)\setminus D\right)$. Следовательно,

$$1\ge M_{k_0}\ge\prod_{i=k_0}^{k}\left(1+\eta_0 r^{is}\nu_i\right)M_k\ge\prod_{i=k_0+1}^{k}\left(1+\eta_0 r^{is}\nu_i\right)\varepsilon_2$$

Откуда следует, что

$$\prod_{i=k_0+1}^{k}\left(1+\eta_0 r^{is}\nu_i\right)<\frac{1}{\varepsilon_2}$$

и значить

$$\sum_{i=k_0}^{k} ln\left(1+\eta_0 r^{is}\nu_i\right)<ln\frac{1}{\varepsilon_2}\ .$$

Так как

$$ln\left(1+\eta_0 r^{is}\nu_i\right)\geq \theta r^{is}\nu_i \ ,$$

где $\theta > 0$ - некоторая константа, зависящая только от S, то

$$\sum_{i=k_0+1}^{k} r^{is}\nu_i \leq \frac{1}{\theta} ln\frac{1}{\varepsilon_2} .$$

В силу предположения о расходимости ряда (15), существует такой помер k', что последнее неравенство может выполняться при $k < k'$. Это k' зависит от k_0, ε_2 и θ, т.е. от S, ε_1, ε_2.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что теорема 1, остается в силе также для уравнения (1), удовлетворяющего условию (3) с функцией

$$\lambda_i(x)=\left[\frac{\omega_i^{-1}(\rho(x))}{g(\rho(x))}\right]^2 ; \quad i=1,...,n \text{, где } \rho(x)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left(|x_i|\right).$$

Мы также докажем достаточный признак регулярности граничной точки типа критерия Винера для уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)u_{x_k} + C(x)u = 0$$

в частном случае, являющийся и необходимым, и совпадающий с ранее известными результатами в невесовом случае, где коэффициенты удовлетворяют условию:

$$\left|\frac{b_i(x)}{\sqrt{\lambda_i(x)}}\right| \leq M \ , \quad -M \leq C(x) \leq 0 \ , \quad x \in \overline{D} \ .$$

Все функции $\widetilde{a}_{ik}(x)=\dfrac{\widetilde{a}_{ik}(x)}{\sqrt{\lambda_i(x)\lambda_k(x)}}$ равномерно непрерывны по Дини в $\overline{D}$, более того, их модуль непрерывности удовлетворяет равномерному, условию Дини: $\varphi(0)=0$, $\int_0^d \frac{\varphi(t)}{t}dt \leq K$, функция φ - монотонно возрастает, выпукла вверх и

$$\varphi(t_1+t_2) \leq \varphi(t_1)+\varphi(t_2)$$

при любых t_1, $t_2 > 0$. Тогда

$$\left|\widetilde{a}_{ik}(x_1)-\widetilde{a}_{ik}(x_2)\right| \leq \varphi\left(|x_1-x_2|\right)$$

при всех $x_1, x_2 \in \overline{D}$, здесь M, K - некоторые постоянные.

Определение 4. Пусть $\lambda_i(x)=\left(\dfrac{\omega_i^{-1}(\rho)}{\rho}\right)^2$; $i=1,...,n$, $\rho=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\left(|x_k|\right)$.

Обозначим через $W_{2,\overline{\lambda}}^{2}(D)$ - пространство функций $u \in L_2(D)$, для которых существуют слабые вторые производные в смысле теории распределений: $u_{x_i x_k} \in L_{2,loc}(D)$, для которых конечна следующая норма

$$\|u\|^2 = \int_D \left[u^2 + \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_i(x)\lambda_k(x) u_{x_i x_k}^2 \right] dx .$$

Определение 5. Пусть $D \subset E_n$ - ограниченная область, имеющая предельную точку $0 \in \partial D$. Обозначим кольцевидное тело

$K_m = \left\{ x \in E_n : \omega_j\left(2^{-m}\right) \le \left|x_j\right| < \omega_j\left(2^{1-m}\right), j = 1,...,n \right\}.$

Пусть далее, $H_m = \left(E^n \setminus D\right) \cap K_m$ непусто. Положим

$$\gamma_m = cap_{n-2,\bar{\lambda}_m} H_m = inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{E_n} \lambda_j(\rho_m) v_{x_j}^2 dx; v \in C_0^\infty(E_n) \right\},$$

где нижняя грань берется по всем таким функциям v, для которых $v(x) \ge 1$ на H_m.

Определение 6. Пусть $D \subset E_n$ - ограниченная область, $0 \in \partial D$. Далее, $\phi \in W_{2,\bar{\lambda}}(D)$ - произвольная функция. Граничная точка O называется регулярной относительно задачи Дирихле, если решение $u_\phi \in W_{2,\bar{\lambda}}^2(D)$ задачи

$$\begin{cases} Lu_\varphi = 0 \quad п.в. \quad x \in D, \\ \left(u_\phi - \phi\right) \in \dot{W}_{2,\bar{\lambda}}^2(D) \end{cases}$$

непрерывно в нуле, т.е.

$$\lim_{x \to 0} \left(u_\phi - \phi\right) = 0 .$$

Теорема 2. Для регулярности граничной точки $0 \in \partial D$ достаточно, чтобы было

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(n-2)} \gamma_m = \infty .$$

Доказательство. Обозначим $v = u_\phi - \phi$. Тогда $Lv = F$ п.в. D, $v \in \dot{W}_{2,\bar{\lambda}}^2(D)$, где $F = L\phi$. Мы должны показать $\lim_{x \to 0} v(x) = 0$.

Обозначим для $m = m_0$, $m_0 + 1,...$ $M_m = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in K_m \cap D} v(x)$. По принципу максимума

$$M_{m_0} \ge M_{m_0+1} \ge ... \ge M_m \ge M_{m+1} \ge ...$$

и решение v непрерывно в D. Поэтому, существенный максимум выше может быть заменен на обычный максимум.

Сделаем замену переменных $x_i = \sqrt{\lambda_i(\rho_m)} y_i$, $i = 1,2,...,n$. Тогда область $D \cap K_m$ перейдет в $D' \cap \left\{ \rho_m \le |y| < \rho_{m-1} \right\}$; $\rho_m = 2^{-m}$, а оператор $L_x = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ перейдет в $L_y = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{a_{ik}}{\sqrt{\lambda_i(\rho_m)\lambda_k(\rho_m)}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_k}$, который, в силу предположений вначале, будет равномерно эллиптическим в $D'\cap\Omega_m$; $\Omega_m = \{\rho_m \le |y| < \rho_{m-1}\}$. А также, в силу тех предположений оператор L_y будет иметь равномерно непрерывные по Дини коэффициенты в $D'_m = D\cap\Omega_m$. Теперь мы будем применять известные результаты о возрастании положительных решений в шаровом слое

$$M_m \ge (1+\gamma'_m)M_{m+1}; \quad m = m_0,\ m_0+1,\dots,$$

здесь $\gamma'_m = 2^{m(n-2)} cap_{n-2} H'_m$; $H'_m = \Omega_m \cap (E_n \setminus D')$ и $cap_{n-2} H'_m$ - обычная Винеровская емкость компакта H'_m. Далее

$$cap_{n-2} H'_m = inf\left\{\int_{E_n} z_y^2 d_y : z \in C_0^\infty(E_n); z \ge 1 \ \ на \ \ H'_m\right\},$$

где нижняя грань берется по всем функциям z.

Сделая обратный переход от y k x по формулам $x_k = \sqrt{\lambda_k(\rho_m)}\ y_k$; $k = 1,..,n$ будет иметь

$$cap_{n-2} H'_m = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\rho_m) \int_{E_n} z_{x_k}^2 dx : z \in C_0^\infty(D); z \ge 1 \text{ п.в. на } \mathrm{H_m}\right\},$$

т.е. $cap_{n-2,\bar\lambda} H_m = cap_{n-2} H_m$. Поэтому

$$M_m \ge (1+\gamma_m)M_{m+1}.$$

Откуда, по индукции, имеем

$$M_{m_0} \ge (1+\gamma_{m_0})(1+\gamma_{m_0+1})..(1+\gamma_{m+1})M_m \ge M_m e^{\eta_0 \sum_{k=m_0}^{m} \gamma_k}$$

или

$$M_m \le M_{m_0} e^{-\eta_0 \sum_{k=m_0}^{m} \gamma_k},$$

где η_0 - некоторая положительная постоянная. Устремив $m \to \infty$, в силу расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$, будем иметь $M_m \to 0$, т.е. $\lim_{x\to 0} \nu(x) = 0$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971, 288 с.
2. Мазья В.Г. Пространства Соболева. М.: ИЛ, 1980, 319 с.
3. Крылов Н.В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985, 376 с.
4. Новрузов А.А. Об одном подходе к исследованию качественных свойств недивергентных эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб., 122, 1983, 3, с.360-387.
5. Новрузов А.А., Мамедов Ф.И. О гладкости решений квазилинейных вырождаю-

щихся уравнений второго порядка // Докл. РАН, 321, 1991, 3, с. 478-481.
6. Гусейнов Р.В. О решениях квазиэллиптических уравнений в цилиндре, удовлетворяющих условию Неймана на некомпактной части границ Дифференциальные уравнения, 1990, т.26, №11, с.2004-2006.
7. Гусейнов Р.В. Об оценках решения задачи Неймана для квазиэллиптических уравнений в неограниченных областях // Успехи мат. наук, 1984, т.49, в.1, с.2009-2010.
8. Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т. Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений 2-го порядка с разрывными коэффициентами // Матем. сб., 131(173), 1986, 4(12), с.477-500.
9. Littman W., Stampacchia, G., Weinberger, H.F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuoula Norm. Sup. Pisa, 1963, v.17, p.45-79.
10. Мамедов И.Т. О поведении вблизи границы решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Матем. заметки, 1981, т.30, №3, с.343-352.
11. Алыгулиев Р.М. Исследование качественных свойств решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Канд. дис., Баку: 2002, 108 с.
12. Amanov R.A. Regularity of boundary point for non-uniformly degenerating second order elliptic equations // Trans. of nat. Acad. of Scieces of Azerb. Ser. of physical – technical and math. Sciences. 2005, v. 25, №1, p.32-39.

DİVERGENT FORMALI OLMAYAN 2-ci TƏRTİB QEYRİ-MÜNTƏZƏM CIRLAŞAN ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD NÖQTƏLƏRİNİN REQULYARLIĞI

R.V.HÜSEYNOV, R.A.AMANOV

XÜLASƏ

İşdə divergent formalı olmayan 2-ci tərtib qeyri-müntəzəm cırlaşan elliptik tip tənlik üçün Dirixle məsələsinə baxılır. Baxılan məsələnin sərhəd nöqtələrinin requlyarlığı üçün Viner tipli kriteri isbat edilir.

REGULARITY OF BOUNDARY POINTS FOR NONUNIFORMLY DEGENERATING ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER IN THE NONDIVERGENT FORM

R.V.HUSEYNOV, R.A.AMANOV

SUMMARY

In the paper Dirichlet problem for nonuniformly degenerating elliptic equations of the second order in the nondivergent form is considered. Wiener type criterion is proved for the regularity of boundary points for the given problem .